Espacio Euclídeo real n-dimensional

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Se generaliza primeramente a R^n el principio de encaje de Cantor en R, que es el instrumento para demostrar el teorema del punto de acumulación o de Bolzano-Weierstrass, del que se deduce el teorema general del encaje.

DEFINICIÓN DE ENCAJE DE INTERVALOS CERRADOS.

Sea $\left\{I^m\right\}_{m\in N}$ una sucesión de intervalos cerrados de R^n, siendo $I^m = [a_1^m, b_1^m]\times\ldots\times[a_n^m, b_n^m]$, donde el superíndice m indica el lugar de orden de la sucesión.
Se dice que la sucesión $\left\{I^m\right\}_{m\in N}$ es un *encaje de intervalos cerrados* si $\ldots\subseteq I^{m+1}\subseteq I^m\subseteq\ldots\subseteq I^2\subseteq I^1$.
Claramente $I^{m+1}\subseteq I^m$ significa que $[a_i^{m+1}, b_i^{m+1}]\subseteq[a_i^m, b_i^m]$ para todo $i:1,\ldots,n.$

PRINCIPIO DEL ENCAJE.

Si en un encaje de intervalos cerrados $\left\{I^m\right\}_{m\in N}$ de R^n se tiene que $\lim_{m\to\infty}(b_i^m - a_i^m) = 0$ para todo $i:1,\ldots,n,$ entonces existe un único punto $\vec{x}\in R^n$ y sólo uno, que pertenece a todos los intervalos de encaje.

Demostración:
Se considera para cada i la sucesión $\left\{a_i^m\right\}_{m\in N}$ que es creciente y está acotada superiormente por b_i^1; entonces, existe $\lim_{m\to\infty} a_i^m$. Análogamente la sucesión $\left\{b_i^m\right\}_{m\in N}$ es decreciente y acotada inferiormente por a_i^1, luego también existe $\lim_{m\to\infty} b_i^m$.
Como $\lim_{m\to\infty}(b_i^m - a_i^m) = 0,$ tomando $x_i = \lim_{m\to\infty} a_i^m = \lim_{m\to\infty} b_i^m$, se tiene que $x_i\in[a_i^m, b_i^m]$ para todo m y, por tanto, $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in I^m$ para cada $m.$
La unicidad de este punto se deduce de la unicidad del límite.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Todo conjunto $A\subset R^n$ infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración:
Como A es acotado podemos incluirlo en un intervalo

$$I^1 = [-a,a]\times[-a,a]\times\ldots\times[-a,a] = I_1^1\times I_2^1\times\ldots\times I_n^1,$$

siendo $I_k^1 = [-a,a]$ para cada $k:1,\ldots n.$ $(a>0).$

Cada I_k^1 puede dividirse en dos intervalos iguales $I_{k,1}^1 = [-a,0]$ e $I_{k,2}^1 = [0,a]$. Se consideran entonces todos los intervalos de la forma $I_{k,p_1}^1 \times I_{k,p_2}^1 \times ... \times I_{k,p_n}^1$ con $p_i = 1$ ó 2, para cada i.

Se pueden construir exactamente 2^n intervalos de este tipo. Su unión es I^1, que contiene infinitos puntos de A y, por tanto, al menos uno de estos 2^n intervalos contiene infinitos puntos de A. Se denominará a este intervalo I^2 y se renombrará por $I^2 = I_1^2 \times I_2^2 \times ... \times I_n^2$, donde cada I_k^2 es uno de los dos subintervalos de I_k^1 de longitud a. Realizamos sobre I^2 el mismo proceso de división en 2^n intervalos y extracción de uno de los que poseen infinitos puntos de A, al que se le llamará $I^3 = I_1^3 \times I_2^3 \times ... \times I_n^3$, siendo cada I_k^3 de longitud $\frac{a}{2}$.

Continuando este proceso sucesivamente se obtiene una colección numerable de intervalos de R^n, $\{I^m\}_{m\in N}$, con la propiedad común de contener infinitos puntos de A.

Escribiendo $I^m = I_1^m \times I_2^m \times ... \times I_n^m$, cada $I_k^m = [a_k^m, b_k^m]$ tiene la longitud $b_k^m - a_k^m = \frac{a}{2^{m-2}}$.

La sucesión $\{I^m\}_{m\in N}$ construida constituye un encaje de intervalos cerrados y como $\lim_{m\to\infty}(b_k^m - a_k^m) = 0$ el principio de encaje asegura que existe un único punto $\vec{x}$ que pertenece a todos los intervalos I^m.

Para probar que $\vec{x}$ es un punto de acumulación de A bastará ver que cada entorno $E(\vec{x},\delta)$ $(\delta > 0)$ contiene algún intervalo I^m, pues de este modo $E^*(\vec{x},\delta) \cap A \neq \varnothing$ ya que I^m contiene infinitos puntos de A. Para que $I^m \subseteq E(\vec{x},\delta)$ es suficiente que la diagonal d del intervalo sea menor que el radio del entorno. Como la longitud de la diagonal es $d = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k^m - b_k^m)^2} = \sqrt{n}\,\frac{a}{2^{m-2}}$, tomando m suficientemente grande, se tiene que $d < \delta$.

TEOREMA GENERAL DEL ENCAJE.

Sea $\{C_m\}_{m\in N}$ una sucesión de conjuntos cerrados y acotados en R^n, no vacíos, tal que $C_{m+1} \subseteq C_m$, para todo m. Entonces $C = \bigcap_{m\in N} C_m$ es un cerrado no vacío.

Demostración:

Lo esencial de este enunciado es probar que C es no vacío; que es cerrado ya ha quedado establecido en las propiedades de los conjuntos cerrados. Así pues se buscará un punto $\vec{x} \in C$.

Si algún C_m es finito, la sucesión $\{C_m\}_{m\in N}$ es estacionaria y la demostración es trivial.

Se supondrá entonces, que todos los C_m contienen infinitos puntos. En cuyo caso, se puede construir un conjunto de puntos distintos $A = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, ...\}$ tomando un $\vec{x}_k$ de cada C_k. Por la suposición anterior, en cada C_k hay infinitos puntos de A.

Como A es infinito y acotado, pues $A \subseteq C_1$, el teorema de Bolzano-Weierstrass asegura la existencia de un punto $\vec{x}$ de acumulación de A.

Todo entorno de $\vec{x}$ incluye infinitos puntos de A y por tanto incluye infinitos puntos de C_k, lo que implica que $\vec{x}$ es también punto de acumulación de C_k; como C_k es cerrado, $\vec{x} \in C_k$; y, como esto ocurre para cada k, $\vec{x} \in C$.

TEOREMA DE HEINE-BOREL-LEBESGUE

DEFINICIÓN DE RECUBRIMIENTO ABIERTO.

Se dice que una familia de conjuntos, $F = \{A_j\}_{j\in J}$ es un recubrimiento de un conjunto K si $K \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$.

Si todos los conjuntos A_j son abiertos, se dice que el recubrimiento F es un recubrimiento abierto de K.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO COMPACTO.

Un conjunto $K \subset R^n$ es compacto si de cada recubrimiento abierto, $F = \{A_j\}_{j\in J}$, de K se puede extraer una familia finita de abiertos A_j de F que sea, a su vez, un recubrimiento de K.
De forma más breve se dice que K es compacto si para cualquier recubrimiento abierto de K existe un subrecubrimiento finito.

Para los conjuntos compactos de R^n existe una notable caracterización según la cual compacto equivale a cerrado y acotado.

TEOREMA DE HEINE-BOREL-LEBESGUE

Un conjunto $K \subset R^n$ es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.

Demostración:
1. *Si K es compacto entonces es acotado.*
En efecto, la familia de entornos $\{E(\vec{0}, n)\}_{n\in N}$ es un recubrimiento abierto de K. Por ser K compacto, también una subfamilia finita recubre K y por tanto K está acotado.

2. *Si K es compacto, entonces es cerrado.*
Si K no fuera cerrado existiría un punto $\vec{a}$ de acumulación de K que no pertenecería a K. La familia de entornos $\left\{ E(\vec{x},\delta) : \vec{x} \in K,\ \delta = \dfrac{\|\vec{x}-\vec{a}\|}{2} \right\}$ es un recubrimiento abierto de K. Por ser K compacto hay una subfamilia finita que recubre K; sea $K \subseteq E(\vec{x}_1,\delta_1) \cup ... \cup E(\vec{x}_p,\delta_p)$ y δ el menor de los radios $\delta_1,...,\delta_p$. Entonces $E(\vec{a},\delta) \cap K = \varnothing$ en contra de la hipótesis de que $\vec{a}$ es punto de acumulación de K.

3. *Si* K *es cerrado y acotado e* $I=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ *es tal que* $K\subseteq I$, *entonces* K *es compacto si* I *es compacto.*
Efectivamente, si $F=\left\{A_j\right\}_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de K, añadiendo a F el abierto R^n-K, se obtiene un recubrimiento abierto F' del intervalo cerrado I. Entonces existe una subfamilia finita de F que recubre K si, y sólo sí, existe una subfamilia finita F' que recubre I. En consecuencia, para probar que K es compacto es suficiente probar que I es compacto.

4. $I=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ *es compacto.*
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todas las aristas de I tienen la misma longitud, es decir que $b_1-a_1=\ldots=b_n-a_n=h.$
Dividiendo cada uno de los intervalos cerrados unidimensionales $[a_i,b_i]$ por su punto medio, se obtiene una descomposición de I en 2^n subintervalos cerrados $n-$dimensionales todos los cuales tienen sus aristas de la misma longitud $\frac{h}{2}$. Se pueden enumerar como $I_{1,k}$ con $k=1,\ldots,2^n$. Si $F=\left\{A_j\right\}_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de I también lo es cada uno de los subintervalos $I_{1,k}$.
Procediendo, ahora, por reducción al absurdo, si no existiera un subrecubrimiento finito de F para I se seguiría que tampoco podría existir un subrecubrimiento finito de F para alguno de los subintervalos $I_{1,k}$. Se designa entonces por I_1 a uno cualquiera de los subintervalos para los que no existe un subrecubrimiento finito de F. Evidentemente $I_1\subseteq I$ y sus aristas tienen longitud $\frac{h}{2}$.
A partir de I_1 se puede repetir el proceso anterior obteniendo un subintervalo I_2, contenido en I_1, para el que no existe un subrecubrimiento finito de F y cuyas aristas tienen la misma longitud $\frac{h}{2^2}$. Análogamente, a partir de I_2, se obtiene I_3, y, en general, a partir de I_{m-1} el subintervalo I_m cuyas aristas tienen la misma longitud, $\frac{h}{2^m}$. En consecuencia, se ha obtenido un encaje de intervalos cerrados $\left\{I_m\right\}_{m\in N}$ con estas dos propiedades:
i) ninguno de los intervalos I_m admite un subrecubrimiento finito de F.
ii) existe un punto $\vec{x}$ común a todos los intervalos I_m, debido al principio del encaje.

Pues bien, estas dos propiedades son contradictorias. De ii) se deduce que alguno de los abiertos A_j de $F=\left\{A_j\right\}_{j\in J}$ cubre a $\vec{x}$ y como A_j es abierto, existe un entorno $E(\vec{x},\delta)$ tal que $\vec{x}\in E(\vec{x},\delta)\subseteq A_j$. Además $I_m\subset E(\vec{x},\delta)$ siempre que la diagonal de I_m sea menor que δ, lo que contradice i).

Otra caracterización de los conjuntos compactos es la siguiente:

PROPOSICIÓN
Un conjunto $K \subseteq R^n$ es compacto si, y sólo si, de toda sucesión de puntos de K puede extraerse una subsucesión convergente a un punto de K.

Demostración:
Teniendo en cuenta el teorema anterior (Tª de H/B/L), en esta proposición se sustituirá la condición de compacto por la de cerrado y acotado.

Supongamos que K es cerrado y acotado. Sea $\{\vec{a}_n\}_{n\in N}$ una sucesión de puntos de K y $A=\{\vec{a}_n : n \in N\}$ el conjunto de sus términos distintos. Si A es finito, entonces existe, al menos, un elemento $\vec{a} \in A$ que es imagen de infinitos elementos de N y por tanto, en $\{a_n\}_{n\in N}$ hay una subsucesión constante de elementos $\vec{a}$. Si el conjunto $A=\{\vec{a}_n : n \in N\}$ es infinito, entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, A tiene, al menos, un punto de acumulación $\vec{a}$. Sea $\vec{a}_{n_1}$ tal que $\left\|\vec{a}_{n_1}-\vec{a}\right\|<1$; sea $\vec{a}_{n_2}$ tal que $n_2 > n_1$ y $\left\|\vec{a}_{n_2}-\vec{a}\right\|<\frac{1}{2}$. En general sea $\vec{a}_{n_k}$ tal que $n_k > n_{k-1}$ y $\left\|\vec{a}_{n_k}-\vec{a}\right\|<\frac{1}{k}$. Entonces $\{\vec{a}_{n_k}\}_{k\in N}$ es una subsucesión de $\{\vec{a}_n\}_{n\in N}$ que converge al punto $\vec{a}$. Como $\vec{a}$ es punto de acumulación de A, también lo es de K. Al ser éste cerrado, $\vec{a} \in K$.

Recíprocamente:
Si K no es acotado, para todo $n \in N$ existe $\vec{a}_n$ tal que $\left\|\vec{a}_n\right\| > n$. Cualquier subsucesión $\{\vec{a}_{n_k}\}_{k\in N}$ extraída de la sucesión $\{\vec{a}_n\}_{n\in N}$ verifica $\left\|\vec{a}_{n_k}\right\| > n_k > k$, lo que implica que no es acotada y, por tanto, tampoco es convergente, en contra de la hipótesis.

Si $\vec{a}$ es un punto de acumulación de K, entonces para cada $n \in N$ existe $\vec{a}_n \in K$ tal que $\left\|\vec{a}_n-\vec{a}\right\|<\frac{1}{n}$. Como la sucesión $\{\vec{a}_n\}_{n\in N}$ converge hacia $\vec{a}$, toda subsucesión de ella también converge hacia a $\vec{a}$ que, por hipótesis, pertenece a K. En consecuencia K es cerrado.